NGUYÊN LÝ CƠ BẢN CỦA TOÁN HỌC:

SỐ VÀ ĐẠI SỐ.

(Quyển 1 trong Toán Thường Thức).

A diagram of a triangle with arrows and a red line

Description automatically generated

Mục lục.

[Toán thường thức là gì? 2](#_Toc167472156)

[Bài 1: Tập hợp và cấu trúc đại số. 3](#_Toc167472157)

[Bài 2: Hàm số và đồ thị hàm số. 7](#_Toc167472158)

[Bài 3: Vector và tọa độ vector trong không gian. 17](#_Toc167472159)

[Bài 4: Phương trình đường thẳng. 29](#_Toc167472160)

[Bài 5: Phương trình đường tròn. 39](#_Toc167472161)

[Bài 6: Lượng giác và góc lượng giác. 46](#_Toc167472162)

[Bài 7: Toán thống kê. 60](#_Toc167472163)

[Bài 8: Elip và Hyperbol. 67](#_Toc167472164)

[Bài tập tự luyện. 71](#_Toc167472165)

[Đáp án bài tập tự luyện. 81](#_Toc167472166)

Toán thường thức là gì?

Toán thường thức là một quyển nhật ký toán học cùng với các bài toán (bao gồm: các định lý, bổ đề) đã được chứng minh một cách đầy đủ và tường minh. Các bộ quyển của toán thường thức sẽ đưa cho chúng ta một cách nhìn nhận khác về bản chất của toán học, khi tài liệu sẽ không chứa các công thức có sẵn mà thay vào đó các công thức sẽ được khám phá qua từng chương.

|  |
| --- |
| Bảng ghi chú công thức: |

Bài 1: Tập hợp và cấu trúc đại số.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Định nghĩa (Tập hợp):** Là một bộ các phần tử có cùng một tính chất xác định. Ví dụ: Tập hợp các số nguyên:

**Phép toán hai ngôi:** Là phép toán hình thành từ hai phần tử để ra một phần tử cùng loại. Vậy, với tập số thực được trang bị hai phép toán là phép cộng và phép nhân , ta có các tính chất sau:

Tính đóng:

Tính kết hợp:

Tính giao hoán:

Tính phân phối:

Tồn tại phân tử đơn vị (phần tử trung hòa): Cho là một tập cùng với phép toán hai ngôi , khi đó gọi là phần tử đơn vị:

* Phép cộng: Phần tử là phần tử đơn vị của phép cộng.
* Phép nhân: Phần tử là phần tử đơn vị của phép nhân.

Tính khả nghịch:Cho là một tập cùng với phép toán hai ngôi , khi đó với một số thực và là phần tử khả nghịch của :

* Phép cộng: Phần tử là khả nghịch của .
* Phép nhân: Phần tử là khả nghịch của .

Phép trừ và phép chia:

**Định lý:** Mỗi phần tử sẽ chỉ có duy nhất một phần tử khả nghịch của nó.

Chứng minh: Cho là một tập cùng với hai phép toán cộng và nhân, khi đó:

* Phép cộng: Giả sử và là hai phần tử khả nghịch của , ta có:
* Phép nhân: Giả sử và là hai phần tử khả nghịch của , ta có:

Vậy dễ thấy , nên chỉ tồn tại duy nhất một phần tử khả nghịch.

**Định lý:** Mọi phần tử nhân với phần đều bằng .

Chứng minh: Với , ta có:

**Định nghĩa (Khoảng, đoạn, nửa khoảng):**

Khoảng: .

Đoạn: .

Nửa khoảng: .

**Các phép toán trên tập hợp:** Cho hai tập hợp và , khi đó:

A black and white logo

Description automatically generated

**Định nghĩa (Hai tập hợp bằng nhau):** Cho hai tập hợp và , hai tập hợp và gọi là bằng nhau nếu mỗi phần tử của cũng là phần tử của và ngược lại.

**Định nghĩa (Tập hợp rỗng):** Là tập hợp không chứa phần tử nào. Ký hiệu: .

**Định nghĩa (Phép hiệu):** Thường được ký hiệu là .

Đặc biệt, nếu thì phép hiệu được gọi là phần bù của trong và được ký hiệu là .

**Mối liên hệ giữa phép giao và hợp:** Với là số phần tử trong tập hợp .

A diagram of a venn diagram

Description automatically generated

Giải thích: Giả sử là phần màu xanh (light turquoise) như hình vẽ. Khi đó nếu lấy tổng só phần tử của và là , nghĩa là sẽ được lặp lại hai lần, vậy trừ đi một , ta sẽ được kết quả như trên.

1. **Bài tập mẫu:**

**Câu 1:** Cho tập hợp có phần tử, tìm số tập hợp con của .

Lời giải.

Giả sử đặt: và là số tập hợp con của . Gọi là tập hợp con của , khi đó theo định nghĩa tập hợp con có thể là một tập hợp rỗng hoặc là bằng tập hợp , vậy ta có tập hợp con của . Xét tập hợp con chỉ chứa phần tử trong , ta có:

Vậy ta sẽ có tập hợp con chứa phần tử trong . Xét tập hợp con chứa hai phần tử trong , khi đó ta có phần tử (xem thêm “Tổ hợp” ở bài 7: Toán thống kê). Tương tự, xét tập hợp con chứa , với , phần tử trong , ta có công thức tổng quát là: . Vậy ta có số tập hơp con của là:

Vậy tập hợp sẽ có tập hợp con, với là số phần tử của .

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 2: Hàm số và đồ thị hàm số.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Định nghĩa (hàm số):** Một ánh xạ đi từ tập vào tập là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử với một và chỉ một phần tử :

Tập tất cả các phần tử sao cho hàm số xác định là miền xác định của hàm số, tập tất cả các phần tử sao cho là miền giá trị của hàm số.

**Định nghĩa (Đa thức):** Một đa thức có dạng:

Cấp của một đa thức được quyết định bởi phần tử bậc cao nhất. Ví dụ nếu cấp của đa thức là thì , nên , . Tập xác định của hàm số đa thức là .

**Định nghĩa (Hàm số bậc nhất):** Hàm số bậc nhất (hay hàm số tuyến tính) là một đa thức bậc một và có dạng là:

Hàm số bậc nhất chỉ có duy nhất một nghiệm:

Nếu thì đồ thị hàm số hướng lên, nếu thì đồ thị hàm số hướng xuống. Không mất tính tổng quát, xét trường hợp :

A graph of a mathematical equation

Description automatically generated with medium confidence

Đặt là góc tạo bởi trục và đường thẳng , khi đó:

Hệ số trước được gọi là hệ số góc của đường thẳng . Vậy, nếu thì , nên .

Xét trường hợp , nghĩa là hàm số vô nghiệm, nên đường thẳng sẽ song song hoặc trùng với đường thẳng nếu .

**Dấu của hàm số bậc nhất:**

* Xét trường hợp với , thì:

Nghĩa là nếu là nghiệm của hàm số thì:

* Xét trường hợp với , thì:

Nghĩa là nếu là nghiệm của hàm số thì:

**Định nghĩa (Hàm số bậc hai):** là hàm số có dạng:

Nghiệm của hàm số bậc hai là:

Khi đó, do , , nên dấu của biểu thức vế phải sẽ phụ thuộc vào tử .

* Nếu , thì ta có một nghiệm duy nhất.
* Nếu , thì ta có hai nghiệm thực phân biệt:
* Nếu , thì ta có hai nghiệm ảo phân biệt:

Với , nghiệm phức chỉ tồn tại khi , hay miền giá trị của nó nằm ở tập giá trị phức, nên nếu , thì trường hợp này phương trình vô nghiệm.

**Định lý (Viète):** Cho hàm số , với , có hai nghiệm thực phân biệt và thì:

Chứng minh: Do hàm số có hai nghiệm thực phân biệt là và nên ta có:

**Dấu của hàm số bậc hai:**

Ở đây, ta chỉ xét trường hợp , ngược lại , ta có thể chứng minh tương tự, khi đó ta có:

* Nếu , khi đó:
* Nếu , khi đó:

Dấu bằng chỉ xảy ra khi là nghiệm của phương trình bậc hai.

* Nếu , khi đó:

Khi đó, giải phương trình trên, ta được nghiệm là:

Ngược lại:

Khi đó, giải phương trình trên, ta được nghiệm là:

**Định lý:** Nếu hàm số có hai nghiệm và phân biệt thì ta luôn có đẳng thức sau:

Chứng minh:

Do hàm số có hai nghiệm phân biệt nên, áp dụng định lý Viet:

**Định lý:** Nếu hàm số có thì phương trình luôn có nghiệm.

Chứng minh: Xét , ta có:

Ta được các nghiệm là:

**Định lý:** Nếu hàm số có thì phương trình luôn có nghiệm.

Chứng minh: Xét , ta có:

Ta được các nghiệm là:

**Tọa độ đỉnh của Parabol:** Cho một Parabol: Tọa độ đỉnh của Parabol là điểm uốn làm cho sự biến thiên hàm số thay đổi, khi đó giá trị của hàm số tại điểm uốn đó sẽ là nhỏ nhất (nếu ), hoặc sẽ là lớn nhất (nếu ). Vậy khi đó, kẻ đường thẳng và giao với tại một điểm duy nhất, ta có:

Để phương trình có một nghiệm duy nhất thì:

Vậy nếu gọi là tọa độ đỉnh của , thì:

A graph of a function

Description automatically generated

**Tính đơn điệu của hàm số:** Cho hàm số và tỉ số như sau:

A graph of function and mathematical equations

Description automatically generated with medium confidence

Gọi và , khi đó tỉ số:

Được gọi là tỉ số biến thiên của hàm số , khi đó ta có 3 trường hợp sau:

Nếu , thì hàm số đồng biến trên khoảng .

Nếu , thì hàm số nghịch biến trên khoảng .

Nếu , thì chưa thể kết luận.

Giải thích: Nếu thì và sẽ cùng dấu, giả sử , ta có:

Ngược lại nếu thì và sẽ trái dấu, khi đó:

Tương tự với trường hợp .

1. **Tổng kết:**

**Hàm số bậc nhất:**

Nếu và , thì:

Nếu và , thì:

**Hàm số bậc hai:**

Nếu phương trình có hai nghiệm và ( thì:

Nếu phương trình chỉ có một nghiệm thì:

Nếu phương trình vô nghiệm thì:

1. **Bài tập mẫu:**

**Bài 1:** Cho hàm số , , có một nghiệm duy nhất, tìm nghiệm của hàm số .

Lời giải.

Do có một nghiệm nên:

Khi đó:

**Bài 2:** Ném một vật với vận tốc ban đầu theo phương xiên hợp với phương ngang một góc . Phương trình quỹ đạo của vật là gì?

Lời giải.

A diagram of a function

Description automatically generated

Đặt trục tọa độ và các điểm như hình vẽ, ta có:

Phương trình chuyển động của vật theo trục , là:

Phương trình chuyển động của vật theo trục , là:

Từ phương trình chuyển động của trục , ta có:

Thế vào phương trình chuyển động của trục , ta được phương trình quỹ đạo của vật như sau:

Vậy phương trình quỹ đạo của vật ném xiên là hình Parabol úp xuống.

Vật đạt cao nhất khi , khi đó độ cao của vật là:

Vật đạt tầm xa nhất khi , khi đó tầm xa của vật là:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 3: Vector và tọa độ vector trong không gian.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Định nghĩa (vector):** Vector là một đối tượng hình học bao gồm 4 thuộc tính: có phương, chiều, hướng và độ lớn. Ký hiệu là: .

Chiều vector: giả sử hai điểm và , chọn trục chiều dương là từ đến , khi đó vector có điểm gốc là và điểm ngọn là , ta quy ước:

Phương vector: là giá của vector đó, bao gồm phương nằm ngang, phương thẳng đứng và phương nằm xiên.

Hướng vector: là bao gồm phương và chiều của vector, nếu hai vector cùng hướng thì hai vector đó cùng phương và cùng chiều, hai vector ngược hướng thì chúng cùng phương nhưng ngược hướng.

Độ lớn vector: là độ dài hình học của vector đó, ký hiệu . Hai vector bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng hướng và cùng độ lớn.

Khi xét một đối tượng vector, ta chỉ quan tâm đến hướng và độ lớn của vector đó và đối với vector , ta chỉ quan tâm điểm ngọn là và điểm đích là , không cần quan tâm đến các điểm ở giữa chúng.

**Các phép toán vector:** Cho các điểm , , , đôi một khác nhau.

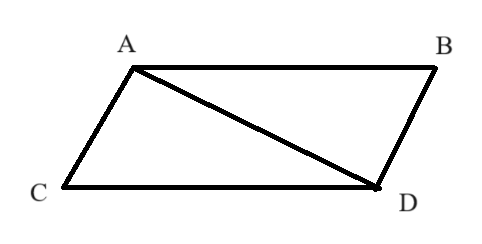
* Phép cộng (quy tắc tam giác):

A black triangle with a black line

Description automatically generated

Để từ đến , ta chỉ quan tâm khoảng cách từ đến , tức là vector , hoặc ta chọn cách di chuyển thứ hai là di chuyển theo thứ tự, đi đến rồi từ đi đến , trải qua hai giai đoạn tương ứng với hai vector và . Khi đó, dù chọn cách nào ta cũng từ điểm ngọn đến điểm đích , nên ta có đẳng thức:

* Phép trừ vector: Được suy ra từ phép cộng.
* Quy tắc hình bình hành:



Nếu là một hình bình hành thì:

Độ dài của vector được tính như sau: áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác , ta có:

* Tính chất trung điểm: Gọi trung điểm thì:

A black line with a cross

Description automatically generated

Chứng minh: Dễ thấy hai vector và là hai vector cùng độ lớn nhưng ngược hướng nên hiển nhiên biểu thức trên đúng.

Trường hợp nếu một điểm bất kỳ nằm ngoài thì:

* Tính chất trọng tâm: Gọi trọng tâm thì:

A triangle with letters and a black line

Description automatically generated

Chứng minh: Gọi là trung điểm và là một điểm đối xứng của qua .

A triangle with a triangle and a triangle with a triangle and a triangle with a triangle and a triangle with a triangle and a triangle with a triangle and a triangle with a triangle and a triangle with

Description automatically generated

Ta có trung điểm và , nên tứ giác là hình bình hành. Đồng thời, ta có (Tính chất trọng tâm) và ( trung điểm ) nên suy ra biểu thức (hai vector cùng hướng).

Nếu có một điểm bất kỳ thì:

* Phép nhân vector với một giá trị vô hướng:

Gọi là một số thực khác không. Khi đó phép nhân sẽ tạo ra một vector cùng phương, và độ lớn gấp lần so với . Vector và sẽ cùng chiều nếu . Vector và sẽ ngược chiều nếu .

Hệ quả: Ba điểm , , được gọi là thẳng hàng khi và chỉ khi:

**Định nghĩa (Tích vô hướng):** Là một tương tác nhân giữa hai vector sinh ra một giá trị vô hướng. Kí hiệu là hay .

Cụ thể hơn, xét tích vô hướng của hai vector và thì:

Trường hợp nếu tích vô hướng của hai vector không cùng ngọn thì:

Tính chất 1:

Dấu bằng xảy ra khi .

Tính chất 2:

Tính chất 3:

Tính chất 4: Cho vector , thì:

Tính chất 5: Tính giao hoán:

**Hệ tọa độ Descartes 2 chiều:** Xác định vị trí của một điểm trên một mặt phẳng cho trước bằng một cặp số tọa độ , trong đó và là hai giá trị được xác định bởi đường thẳng có hướng vuông góc với nhau (cùng đơn vị đo). Hai đường thẳng đó được gọi là hệ trục tọa độ; trục nằm ngang được gọi là trục hoành, trục đứng gọi là trục tung, điểm giao của hai trục hoành và trục tung là gốc tọa độ và được ký hiệu là .

A graph of a function

Description automatically generated

**Tọa độ vector:** Nếu , thì cặp số được gọi là tọa độ của vector . Với là vector đơn vị của trục hoành và được gọi là hoành độ; với là vector đơn vị của trục tung và được gọi là tung độ, khi đó:

**Định lý:** Trong mặt phẳng , cho và là hai vector độc lập tuyến tính (tức là hai vector và không cùng phương với nhau). Khi đó, với một vector bất kỳ, ta luôn có thể biểu diễn được vector theo hai vector và .

Chứng minh: Với , và là các vector nằm trong mặt phẳng , nên:

Khi đó, gọi và là các số thực sao cho thỏa mãn:

Với các giá trị , , , , và đã được biết, ta có thể giải hệ phương trình trên tìm cặp số , khi đó:

**Các phép toán và ứng dụng của tọa độ vector:**

* Hai vector bằng nhau: Cho và .
* Tọa độ một điểm: Với mỗi điểm thì tọa độ vector được gọi là tọa độ của điểm .
* Liên hệ tọa độ điểm và vector: Cho và :
* Phép toán cộng của hai vector:
* Phép trừ của hai vector:
* Phép nhân vô hướng với một số thực:
* Nhân vô hướng của hai vector:

Trường hợp nếu vector vuông góc với thì:

* Góc giữa hai vector:
* Độ dài của một vector:

Đối với vector thì:

A diagram of a line with letters and numbers

Description automatically generated

Đặt , gọi là hình chiếu của lên trục , gọi là hình chiếu của lên trục . Xét tứ giác , ta có:

Suy ra, tứ giác là hình chữ nhật và , áp dụng định lý Pythagore cho tam giác , ta có:

Đối với độ dài vector , với và , ta có:

* Hai vector cùng phương:
* Tọa độ trung điểm: Gọi là trung điểm , khi đó:
* Tọa độ trọng tâm: Gọi là trọng tâm , khi đó:
* Tọa độ điểm để là hình bình hành:

A black rectangle with black text

Description automatically generated

Do là hình bình hành nên ta có:

* Tọa độ chân đường phân giác , ta có:

A triangle with a point and letters

Description automatically generated with medium confidence

Do là đường phân giác trong của , ta có:

Do và cùng phương và cùng chiều nên:

Tới đây ta có thể dễ dàng tìm và .

* Tọa độ chân đường cao :

A triangle with a straight line

Description automatically generated

Do tại nên ta có:

Kết hợp với nên cùng phương , nên ta có:

Kết hợp và ta có hệ hai phương trình với hai ẩn là , nên dễ dàng giải hệ và tìm được tọa độ chân đường cao .

* Tìm tọa độ trực tâm của tam giác :

A triangle with letters and a square

Description automatically generated

Kẻ hai đường cao và , khi đó là trực tâm của , khi đó:

Từ hai phương trình trên, dễ dàng giải hệ phương trình để tìm .

1. **Bài tập mẫu:**

**Đè bài chung cho các câu 1, 2, 3:** Cho tam giác có tọa độ các định lần lượt là , , , gọi là trung điểm của và là trung điểm .

A triangle with letters and a triangle

Description automatically generated

**Câu 1**: Tính tọa độ điểm và chân đường cao .

**Câu 2:** Tính độ dài .

**Câu 3:** Tính diện tích tam giác .

Lời giải.

* Câu 1: Ta có và , từ đó sẽ thấy rằng:

Suy ra vuông cân tại , khi đó nếu gọi là trung điểm thì đồng thời cũng sẽ là trung điểm và .

* Câu 2: Do trung điểm nên:
* Câu 3: Ta có tam giác vuông cân ở nên góc và đồng thời tam giác vuông tại có trung tuyến nên , tính :

Hoặc ta có thể dụng một công thức sau đây:

Chứng minh: Xét:

Để đơn giản bài toán, ta đặt:

Khi đó, ta được:

Vậy với công thức ở trên, ta có thể áp dụng để tính diện tích của một tam giác bất kỳ nếu biết tọa độ điểm của ba đỉnh tam giác đó.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 4: Phương trình đường thẳng.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Khái niệm:** Đường thẳng.

**Định nghĩa (vector chỉ phương):** Là vector có phương song song hoặc trùng với phương của đường thẳng. Thường được ký hiệu là vector .

**Định nghĩa (vector pháp tuyến):** Là vector có phương vuông góc với phương của đường thẳng. Thường được ký hiệu là vector .

**Phương trình tham số của đường thẳng:** Cho đường thẳng đi qua điểm và một vector chỉ phương của là .

Khi đó, gọi , nên suy ra cũng là một vector chỉ phương của , vậy sẽ cùng phương với , ta có:

**Phương trình chính tắc của đường thẳng:** Từ phương trình tham số ở trên, ta có:

Trường hợp nếu hoặc thì phân thức trên vẫn tồn tại, ví dụ không mất tính tổng quát, chọn (tương tự nếu ), thì:

**Phương trình tổng quát của đường thẳng:** Ta có:

Dễ thấy, nếu là vector chỉ phương của thì là vector pháp tuyến của , khi đó:

Với là vector pháp tuyến của đường thẳng .

**Định lý:** Một đường thẳng có thể có vô số phương trình tham số và phương trình chính tắc nhưng chỉ tồn tại duy nhất một phương trình tổng quát.

Chứng minh: Một đường thẳng phụ thuộc vào 2 yếu tố, điểm đi qua và vector chỉ phương (vector pháp tuyến đối với phương trình tổng quát), khi đó ta có hai phần chứng minh như sau:

* Nếu Vector chỉ phương là có thể thay đổi:

Xét đường thẳng đi qua điểm và có vector chỉ phương Giả sử một vector có một vector chỉ phương khác là .

Với là vector chỉ phương của thì:

Phương trình tham số:

Phương trình tổng quát:

Với là vector chỉ phương của thì:

Phương trình tham số:

Phương trình tổng quát:

Dễ thấy ở phương trình tham số nhưng với phương trình tổng quát thì , vậy phương trình tham số có thể phụ thuộc vào các giá trị khác nhau, nhưng ở phương trình tổng quát thì đã bị triệt tiêu hoàn toàn.

* Nếu tọa độ điểm là có thể thay đổi:

Chọn một điểm , và có vector pháp tuyến là .

Phương trình tham số:

Phương trình tổng quát:

Hoàn toàn giống với phương trình của giả thiết, vậy ta được điều phải chứng minh.

**Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:** Cho hai đường thẳng và như sau:

* Trường hợp hai đường thẳng cắt nhau:

Từ phương trình của hai đường thẳng và ta dễ dàng suy ra được hai vector chỉ phương lần lượt của và là và . Do hai đường thẳng và cắt nhau nên:

Nếu gọi thì tọa độ điểm thỏa hệ phương trình:

* Trường hợp song song và trùng:

Do hai đường thẳng cùng phương với nên:

Ở trên chỉ là điều kiện cần để và cùng phương, nhưng cùng phương có hai trường hợp là song song hoặc trùng nhau. Ở phía trên, ta đã chứng minh rằng: với mỗi đường thẳng thì đều có duy nhất một phương trình tổng quát, nên nếu trùng thì tồn tại số thực sao cho , và . Vậy, nếu trùng với thì:

Nếu song song thì:

**Định nghĩa (Khoảng cách):** Gọi và một điểm nằm ngoài đường thẳng , khi đó khoảng cách của điểm và đường thẳng là:

A black line with letters and a triangle

Description automatically generated

Từ định nghĩa, nếu gọi là hình chiếu của lên thì là khoảng cách của và . Giả sử gọi và , khi đó vuông tại , dễ thấy là cạnh huyền trong tam giác vuông, là cạnh góc vuông, nên , vậy khi và chỉ khi , thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy, nếu ta xuất phát theo định nghĩa, để tính khoảng cách từ đến thì ta phải tính độ dài , giả sử tọa độ điểm và phương trình đường thẳng đã biết, muốn tính độ dài thì cần biết tọa độ điểm .

Gọi và là hình chiếu của lên , ta có:

Vậy sẽ cùng phương với vector pháp tuyến của và nhận vector chỉ phương của làm vector pháp tuyến. Từ đó, ta có thể viết phương trình đường thẳng đi qua điểm và có vector pháp tuyến là :

Sau cùng, gọi , nên tọa độ điểm thỏa hệ phương trình:

Giả sử tìm được tọa độ điểm , vậy:

Làm vậy khá tốn công, nên ta sẽ tìm cách để tìm ra một công thức tổng quát, do cùng phương với nên:

Do , nên tọa độ điểm phải thỏa mãn phương trình:

Vậy khoảng cách từ đến là:

Vậy với phương trình đường thẳng và tọa độ điểm cho trước, ta có thể tính được khoảng cách từ đến .

**Khoảng cách của hai đường thẳng song song:** Cho hai đường thẳng:

A diagram of a rectangular object with black text

Description automatically generated

Gọi và là hai điểm thuộc , gọi và lần lượt là hình chiếu của và lên . Khi đó, ta dễ thấy do , và nên tứ giác là hình chữ nhật, suy ra , vậy ta có:

Giả sử chọn điểm . Khi đó:

**Góc giữa hai đường thẳng:** Cho hai đường thẳng và có hai vector pháp tuyến lần lượt là và . Khi đó, góc giữa hai đường thẳng và sẽ bao gồm góc (như vẽ hình bên dưới); vậy để dễ tính toán, ta sẽ quy ước góc giữa hai đường thẳng và là một góc nhọn, do đó:

A black and white image of a cross

Description automatically generated

Giả sử hai vector chỉ phương của là và vector chỉ phương của là , khi đó:

Lưu ý: Nếu tính góc của một góc bất kỳ được tạo bởi hai vector, ví dụ như hình vẽ sau đây:

A group of triangles with text

Description automatically generated

Giả sử góc được tạo bởi hai vector và , dễ thấy rằng góc có thể là góc nhọn, góc vuông hoặc góc tù nên khi tính góc , ta có thể nhận các giá trị âm hoặc dương tùy ý và giá trị đó phải nằm trong đoạn .

1. **Tổng kết:**

Đường thẳng qua và có vector pháp tuyến . Phương trình tổng quát của đường thẳng là:

Đường thẳng có hệ số gốc là , thì:

Đường thẳng có một vector chỉ phương thì:

Đường thẳng đi qua điểm và , vậy sẽ nhận vector là vector chỉ phương và chọn một trong hai điểm đi qua là hoặc , ở đây ta chọn đi qua điểm :

Đường thẳng , khi đó:

Đường thẳng , khi đó:

1. **Bài tập mẫu:**

**Đề bài chung cho các câu 1, 2, 3 và 4:** Cho tam giác , có tọa độ các điểm là , và . Gọi , , lần lượt là trung điểm của , và .

**Câu 1:** Tìm tọa độ của chân đường cao .

**Câu 2:** Tìm tọa độ trực tâm của tam giác .

**Câu 3:** Viết phương trình đường thẳng trung tuyến .

**Câu 4:** Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác .

Lời giải.

* Câu 1: Kẻ , nên đường thẳng nhận làm vector pháp tuyến và đồng thời đi qua điểm , khi đó:

Phương trình đường thẳng là:

Do , nên tọa độ điểm thỏa hệ phương trình:

* Câu 2: Kẻ , nên đường thẳng nhận làm vector pháp tuyến và đồng thời đi qua điểm , khi đó:

Do là trực tâm tam giác , vậy là giao điểm của hai đường cao và nên , nên tọa độ điểm thỏa hệ phương trình:

* Câu 3: Do trung điểm , nên:

Vậy phương trình đường thẳng đi qua và nhận là vector chỉ phương. Phương trình đường thẳng là:

* Câu 4: Gọi là trọng tâm tam giác , khi đó:

A triangle with letters and a triangle

Description automatically generated

Do , , lần lượt là trung điểm , , , ta có:

Vậy cũng là trọng tâm của tam giác . Khi đó, ta viết phương trình đường thẳng :

Kết hợp , nên tọa độ điểm thỏa hệ phương trình:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 5: Phương trình đường tròn.

1. **Bài toán dẫn đến phương trình đường tròn:**

**Bài toán 1:** Cho hai điểm và . Tìm tập hợp các điểm sao cho tam giác vuông tại .

Lời giải.

Gọi , khi đó: và , để tam giác vuông tại thì , vậy:

A circle with a triangle in the center

Description automatically generated

Với tọa độ điểm để thỏa mãn tam giác vuông tại thì tập hợp các điểm là đường tròn có tâm (với trung điểm ) và đường kính . Dễ hiểu vì là góc nội tiếp chắn nửa cung đường tròn nên góc . Để kiểm chứng cho phương trình trên, ta dễ dàng tìm được tọa độ trung điểm là và bán kính . Vậy ta có một phương trình tổng quan cho phương trình đường tròn có tâm và bán kính là:

**Bài toán 2:** Cho điểm cố định, cho điểm , tìm độ dài .

Lời giải.

Ta có: , khi đó:

A circle with a line in the middle

Description automatically generated

Dễ thấy với điểm cố định, một điểm bất kỳ thì độ dài sẽ là bán kính của đường tròn tâm và khi đó tập hợp các điểm là đường tròn tâm và có bán kính là .

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Phương trình tổng quát của đường tròn:** Một đường tròn có tâm và bán kính là thì:

**Phương trình chính tắc:** Đặt , và từ phép đặt ở trên, để là một đường trìn thì phải có nghĩa, hay biểu thức trong căn phải lớn hơn , . Từ phương trình tổng quát, ta có:

**Phương trình tham số (Phương trình trong hệ tọa độ cực):** Hệ tọa độ cực là một hệ tọa độ sử dụng các tham số và bán kính để biểu diễn thay cho tọa độ . Xét một đường tròn có tọa độ tâm và điểm thuộc đường tròn tâm , gọi , khi đó:

A circle with arrows and a circle with letters

Description automatically generated

Xét một vector , thực hiện phép tịnh tiến biến điểm thành một điểm và điểm thành điểm , khi đó:

Vậy, qua phép tịnh tiến ta biến đường tròn tâm bán kính thành đường tròn tâm bán kính . Ta có:

A diagram of a circle and a circle with letters

Description automatically generated

**Tiếp tuyến của đường tròn:** Cho đường tròn có tâm và bán kính . Một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn tại điểm , khi đó:

A black circle with a line and a line in the middle

Description automatically generated with medium confidence

Tọa độ điểm , nên tọa độ điểm sẽ thỏa hệ phương trình:

Vậy sẽ nhận làm vector pháp tuyến và .

1. **Bài tập mẫu:**

**Đề bài chung cho các câu 1, 2, 3, 4 và 5:** Cho tọa độ các điểm không thẳng hàng là , , và .

**Câu 1:** Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

**Câu 2:** Viết phương trình tổng quát đường tròn tâm và có tiếp tuyến là đường thẳng đi qua hai điểm và .

**Câu 3:** Các điểm , , và có cùng thuộc một đường tròn không?

**Câu 4:** Gọi , tìm tọa độ điểm để thuộc đường tròn tâm bán kính .

**Câu 5:** Gọi là một điểm thuộc đường tròn tâm có bán kính là , tìm tọa độ điểm sao cho độ dài là lớn nhất.

A black and white drawing of a circle and a rectangle

Description automatically generated

Lời giải.

* Câu 1: Gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp .

Cách 1: Gọi phương trình chính tắc của là:

Do tam giác ngoại tiếp đường tròn nên:

Từ đó ta có một hệ phương trình gồm 3 ẩn:

Cách 2: Do là tâm đường tròn ngoại tiếp , nên chính là giao điểm của ít nhất 2 đường trung trực của , gọi là đường thẳng trung trực của , gọi là đường thẳng trung trực của , tiếp sau đó gọi trung điểm và trung điểm .

Viết phương trình đường thẳng là trung trực , nhận làm vector pháp tuyến và đi qua điểm :

Viết phương trình đường thẳng là trung trực , nhận làm vector pháp tuyến và đi qua điểm :

A diagram of a triangle

Description automatically generated

Do , nên tọa độ điểm thỏa hệ phương trình:

* Câu 2: Đường thẳng có vector chỉ phương là và đi qua điểm là:

Đường tròn tâm có tiếp tuyến là đường thẳng nên:

Vậy phương trình đường tròn tâm và bán kính là:

* Câu 3:

Cách 1: Xét hai vector và , nên dễ thấy chúng cùng phương và đồng thời , nên tứ giác là hình bình hành. Để tứ giác nội tiếp thì , hình bình hành không có tính chất này, nên các điểm , , và không cùng thuộc một đường tròn.

Cách 2: Từ câu 1 ở trên, ta có phương trình đường tròn ngoại tiếp là:

Giả sử , khi đó tọa độ điểm phải thỏa phương trình đường tròn :

Vậy , nên các điểm , , và không cùng thuộc một đường tròn.

* Câu 4: Phương trình đường tròn tâm bán kính là:

Để thì tọa độ điểm phải thỏa phương trình đường tròn :

Giải phương trình trên có hai nghiệm là hay , nên sẽ tồn tại hai tọa độ điểm là: hay .

* Câu 5: Dễ thấy và đều thuộc đường tròn tâm , khi đó nối cả hai điểm và sẽ tạo thành 1 dây cung, vậy dây cung sẽ là lớn nhất nếu là đường kính, vậy sẽ là trung điểm của , gọi , khi đó:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 6: Lượng giác và góc lượng giác.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

Xét đường tròn đơn vị nhận điểm là tâm đường tròn. Khi đó phương trình đường tròn là:

Gọi điểm , khi đó gọi là hình chiếu của lên trục và là hình chiếu của lên trục .

A diagram of a circle with a circle and a circle with letters

Description automatically generated with medium confidence

Khi đó gọi , ta có:

Nói cách khác, là tập giá trị của và là tập giá trị của , khi đó với điểm di động trên đường tròn , ta có:

Lại có, do nên và , vậy:

Do là góc của và , nên là một số thực bất kỳ (nếu xoay theo ngược chiều kim đồng hồ thì và nếu xoay cùng chiều kim đồng hồ thì ), nên tập xác định của hai hàm số và là .

**Một vài hàm lượng giác khác:**

Mối liên hệ giữa và , và :

Chứng minh: Ta có:

|  |  |
| --- | --- |
| Với , chia cả hai vế cho , ta có: | Với , chia cả hai vế cho , ta có: |

**Đơn vị đo góc:** Thường dùng độ hoặc radian , .

**Định nghĩa (radian):** Radian là số đo góc của chiều dài một cung tròn. Xét đường tròn có bán kính và một cung tròn có chiều dài được tạo bơi góc , khi đó:

A circle with a triangle in the center

Description automatically generated

Nếu (chu vi của đường tròn) thì:

Đường tròn quét một góc sẽ tương ứng với , vậy với một góc và , ta sẽ thiết lập được công thức sau:

**Giá trị của lượng giác:** Với điểm , đường tròn đơn vị có là tâm đường tròn, dễ thấy sẽ nhận trục (được biểu diễn bởi đoạn thẳng ) là tập giá trị và sẽ nhận trục (được biểu diễn bởi đoạn thẳng ) là tập giá trị. Khi đó:

Một vài giá trị lượng giác đặc biệt:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

**Dấu của hàm lượng giác:** Xét hình vẽ dưới đây, ta có:

**A black circle with a point and arrows

Description automatically generated**

**Một số biến đổi lượng giác:**

* Góc đối:

Chứng minh: Từ định nghĩa, khi quay ngược chiều kim đồng hồ và khi quay cùng chiều kim đồng hồ. Xét và , ta có:

A diagram of a circle with arrows and a triangle in the center

Description automatically generated

Xét điểm , ta có:

Xét điểm , ta có:

Từ hai biểu diễn trên, suy ra điều phải chứng minh.

* Góc bù:

Chứng minh: Gọi điểm , với , thuộc đường tròn . Từ điểm kẻ , khi đó đặt . Gọi sao cho và gọi điểm sao cho . Xét và , ta có:

A diagram of a circle with a triangle and a arrow

Description automatically generated

Xét điểm , ta có:

Xét điểm , ta có:

Từ hai biểu diễn trên, suy ra điều phải chứng minh.

* Góc phụ:

Chứng minh:

A black triangle with a black line

Description automatically generated

Đặt , xét tam giác vuông tại , ta có:

* Góc hơn kém :

Chứng minh: Đặt các điểm như hình vẽ, kẻ và , khi đó:

A diagram of a circle with arrows and letters

Description automatically generated

Ta có:

Xét và , ta có:

Xét điểm , ta có:

Xét điểm , ta có:

Từ hai biểu diễn trên, suy ra điều phải chứng minh.

* Góc hơn kém :

Chứng minh: Đặt các điểm như hình vẽ, kẻ và , khi đó:

A circle with a triangle and a triangle in the center

Description automatically generated

Xét và , ta có:

Xét điểm , ta có:

Xét điểm , ta có:

Từ hai biểu diễn trên, suy ra điều phải chứng minh.

**Định nghĩa (Hàm số tuần hoàn):** Một hàm số được gọi là hàm số tuần hoàn, nếu tồn tại một số thực sao cho:

Vậy đối với hàm số và , khi bán kính quét hết một góc , thì sẽ trở về vị trí ban đầu, vậy và sẽ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ . Khi đó với , ta có:

Đối với hàm số và sẽ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ , ta có:

Chứng minh: dễ thấy nếu , với thì:

Nếu , với thì:

Tương tự, ta có thể chứng minh với hàm tuần hoàn .

**Định lý hàm sin trong tam giác:** Cho , khi đó:

Với là bán kính ngoại tiếp đường tròn , và để đơn giản hóa ký hiệu, trong tam giác ta tạm gọi Tương tự với các góc còn lại.

Chứng minh: Trong tam giác , kẻ hai đường cao và , tiếp theo gọi là đường tròn ngoại tiếp và có đường kính , khi đó:

A black and white image of a circle and a triangle

Description automatically generated

Xét vuông tại và vuông tại , ta có:

Xét vuông tại và vuông tại , ta có:

Ta có: (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ), do đó xét vuông tại ( là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn):

Từ , và ta suy ra:

**Định lý hàm cosin trong tam giác:** Cho , ta có:

Chứng minh: Trong , kẻ đường cao , khi đó:

A black triangle with black text

Description automatically generated

Xét vuông tại , ta có:

Xét vuông tại , ta có:

Tương tự, ta có thể dễ dàng chứng minh cho các cạnh còn lại.

**Các công thức diện tích tam giác:** Xét có đường cao , khi đó:

A black triangle with a square in the middle

Description automatically generated

Do tam giác vuông tại , nên ta có:

Áp dụng định lý hàm sin trong , ta có:

Gọi là tâm đường tròn nội tiếp , kẻ , và và đặt là bán kính đường tròn nội tiếp , khi đó:

A black triangle with a circle and a circle with letters

Description automatically generated

Diện tích của được tính bởi:

Với là nửa chu vi của :

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác , ta có:

Tam giác có góc thỏa mãn , nên . Khi đó:

Xét riêng biểu thức sau đây:

Khi đó, diện tích của là:

Công thức còn được gọi là công thức Heron.

1. **Bài tập mẫu:**

**Đề bài chung cho các câu 1 và 2:** Cho có , và .

**Câu 1:** Gọi trung điểm , tính độ dài .

**Câu 2:** Kẻ là đường phân giác trong , tính tỉ số .

Lời giải.

A two triangles with lines in the sides

Description automatically generated with medium confidence

Câu 1: Áp dụng định lý hàm cosin trong , ta có:

Áp dụng định lý hàm cosin trong , ta có:

* Câu 2: Áp dụng định lý hàm sin cho , ta có:

Áp dụng định lý hàm sin cho , ta có:

Do là đường phân giác trong , nên:

Kế tiếp, ta có:

Từ , , và , suy ra:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 7: Toán thống kê.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Quy tắc cộng:** Một sự kiện bao gồm các trường hợp độc lập với nhau, sự tồn tại của trường hợp này không ảnh hưởng đến sự tồn tại của trường hợp khác:

Ví dụ: Từ thành phố đến thành phố có cách để di chuyển khác nhau đó là đi xe lửa, xe buýt hoặc đi bằng ô tô. Biết đi xe lửa có cách chọn, xe buýt có cách chọn và đi ô tô có cách chọn. Tính số cách để đi từ .

Lời giải:

A black line on a white background

Description automatically generated

Do các cách chọn độc lập với nhau nhau, nên ta có:

**Quy tắc nhân:** Một sự kiện bao gồm các trình tự phụ thuộc với nhau, sự tồn tại của trình tự trước đó có thể ảnh hưởng đến trình tự tiếp theo.

Ví dụ: Từ thành phố đến thành phố phải đi qua một thành phố trung gian là thành phố . Biết rằng từ thành phố đến thành phố có 8 cách chọn và từ thành phố đến thành phố có 10 cách chọn. Tính số cách để đi từ .

Lời giải:

A black circle with a letter y in it

Description automatically generated

Dễ thấy, muốn đến được thành phố , phải thông qua thành phố , nên số các cách chọn của và là một trình tự, nên ta có:

**Nguyên lý bù trừ:** Xét một tập hợp chứa hai tập hợp con là và .

A black and white image of a rectangular object with stars

Description automatically generated

Dễ thấy , khi đó nếu biết được tổng các phần tử và biết một trong hai phần tử còn lại, giả sử đã biết phần tử , khi đó:

**Định nghĩa (Giai thừa):** Tích các số nguyên dương từ đến , , được gọi là giai thừa, và được kí hiệu là:

Tính chất cơ bản:

Từ tính chất trên, nếu , thì ta có:

**Hoán vị:** Là một cách sắp xếp ( phần tử vào vị trí, khi đó:

Giải thích: Cho phần tử và vị trí. Khi đó có cách chọn phần tử để sắp xếp vào vị trí thứ , tiếp theo ta có cách chọn phần tử vào vị trí số , sau đó lại có cách chọn phần tử vào vị trí số ,… liên tục như vậy cho đến khi hết chỗ, dễ thấy đây là một trình tự, nên ta sử dụng quy tắc nhân:

**Chỉnh hợp:** Là một cách sắp xếp phần tử vào vị trí, khi đó:

Giải thích: Cho phần tử và vị trí, khi đó chọn . Khi đó có cách chọn phần tử để sắp xếp vào vị trí thứ nhất, tiếp theo ta có cách chọn phần tử vào vị trí số ,… tiếp tục như vậy cho đến hết vị trí, bây giờ ta chỉ còn lại phần tử, sử dụng quy tắc nhân, ta có:

**Tổ hợp:** Là một cách chọn (không sắp xếp) phần tử trong phần tử (), khi đó:

Giải thích: Xét một tập hợp gồm 3 phần tử , khi đó sử dụng chỉnh hợp sắp xếp 2 phần tử vào 3 vị trí, ta có cách xắp xếp, đó là: , , , , và . Nếu bỏ qua cách sắp xếp ta thấy , và , khi đó chỉ còn lại tổ hợp, vậy nếu chọn 2 phần tử thì ta có cách ứng với mỗi tổ hợp, tổng quát hóa, ta được:

Một số tính chất của tổ hợp:

**Chú ý:** Dễ thấy rằng tổ hợp, chỉnh hợp và hoán vị có liên quan mật thiết với nhau, nên thay vì học hết cả 3 công thức trên, ta chỉ cần học 2 trong 3 công thức, một gợi ý là ta nên học và hiểu kỹ (chỉnh hợp) và (tổ hợp) vì hoán vị chính là một trường hợp nhỏ của chỉnh hợp. Dễ thấy nếu thì:

**Định nghĩa (Không gian mẫu):** không gian mẫu hay không gian mẫu toàn thể, thường được ký hiệu là , là tập hợp của tất cả kết quả của phép thử đồng khả năng có thể xảy ra.

**Định nghĩa (Biến cố):** Là tập hợp các kết quả thuận lợi của một phép thử.

**Biến cố đối:** Cho là một biến cố trong không gian mẫu . Khi đó được gọi là biến cố đối của , nếu mọi kết quả thuận lợi của biến cố là kết quả không thuận lợi của biến cố và ngược lại. Khi đó:

**Xác xuất:** Là một mô tả bằng số về khả năng xảy ra của một sự kiện. Nếu là một biến cố thì là số phần tử thuận lợi của biến cố và là không gian mẫu của các phép thử. Khi đó xác xuất của biến cố , kí hiệu là , là:

1. **Bài tập mẫu:**

**Câu 1:** Xét tập hợp . Từ tập hợp , có thể lập được bao nhiêu số có chữ số đôi một khác nhau.

Lời giải:

Gọi số có 8 chữ số đó là: , từ điều kiện đôi một khác nhau, ta có:

Xét số có cách chọn, do , còn lại tập hợp còn chữ số với vị trí, khi đó ta sắp xếp số trên vào vị trí, ta sẽ có:

**Câu 2:** Trong học kỳ tiếp theo, một bạn sinh viên bắt buộc phải đăng ký trong môn Toán, đó là: Lý thuyết số, Đại số, Hình học, Giải tích và Toán thống kê và phải đăng ký trong môn Vật Lý, đó là: Cơ học, Nhiệt học, Điện từ học, Quang học và Cơ học lượng tử. Tính số cách chọn môn học cho bạn sinh viên trên.

Lời giải:

Chọn trong môn Toán nên ta có (cách) và chọn trong môn Vật Lý nên ta có (cách). Vậy ta sẽ có:

**Câu 3:** Trong một trò chơi cá cược giữa hai bạn Quang và Lượng. Trò chơi cá cược diễn ra như sau: Ném 2 xúc xắc có 6 mặt đều và cân đối, nếu một trong hai con xúc xắc xuất hiện mặt số hoặc số thì bạn Quang sẽ nhận đô la, ngược lại bạn Lượng sẽ nhận đô la. Giả sử bạn là người chơi thứ ba, bạn sẽ chọn phe nào để lời nhất ?

Lời giải:

Giả sử đặt cược theo bạn Quang, khi đó không gian mẫu là . Để tìm biến cố, ta chia thành các trường hợp sau:

Gọi là số cách để duy nhất xúc xắc một ra mặt và : (cách).

Gọi là số cách để duy nhất xúc xắc hai ra mặt và : (cách).

Gọi là số cách để cả hai xúc xắc ra mặt và : (cách).

Khi đó xác xuất để Quang thắng là:

Xác xuất để Lượng thắng là:

**Câu 4:** Trong một lần đi mua sách, bạn Đậu cần mua 5 quyển sách cho 2 môn học Toán và Lý. Biết rằng tiệm sách đó có 10 quyển sách Toán, 10 sách Lý. Tính số cách chọn mua sách của bạn Đậu để trong đó có ít nhất 1 quyển sách Toán.

Lời giải.

A rectangular object with text

Description automatically generated

Chú thích.

T : Toàn sách Toán.

L : Toàn sách Lý.

T + L : Có cả sách Toán và Lý.

Nhìn từ sơ đồ trên, ta thấy điều kiện có ít nhất 1 quyển sách toán thì chỉ có hai trường hợp thỏa mãn đó là toàn sách Toán và trường hợp có cả sách Toán và Sách Lý, khi đó:

Với là phần tử tổng, để thỏa yêu cầu bài toán thì ta có:

1. **Đọc thêm:**

Vào năm 1651, Blaise Pascal nhận được bức thư của nhà quý tộc Pháp, De Méré, nhờ ông giải quyết các rắc rối nảy sinh trong trò chơi đánh bạc. Pascal đã toán học hóa các trò chơi đánh bạc này, nâng lên thành những bài toán phức tạp hơn và trao đổi với Fermat, một nhà toán học. Những cuộc trao đổi đó đã nảy sinh ra Lý thuyết xác xuất – lý thuyết toán học về các hiện tượng ngẫu nhiên.



James Bernoulli: là người phát minh ra Luật số lớn.

Leibniz: có nhiều công lao trong việc xây dựng lý thuyết xác xuất.

Werner Heisenberg: Nhà vật lý người Đức.

Erwin Schrodinger: Nhà vật lý người Áo.

Vào trước thế kỷ , trước khi cơ học lượng tử ra đời, các nhà Vật Lý cổ điển không tin vào sự ngẫu nhiên tuyệt đối vì họ cho rằng các vật mang tính xác xuất như: mặt sấp ngửa của đồng xu, các mặt của xúc xắc,… không đơn thuần mang giá trị ngẫu nhiên với xác xuất với mặt sấp ngửa đồng xu và với các mặt của xúc xắc. Họ cho rằng trong khoảng thời gian tung đồng xu, do ta chưa có đủ thông tin và thời gian để tính được đồng xu sẽ rơi vào mặt nào. Có một câu nói nổi tiếng của Albert Einstein, người đặt nền móng cho nền Vật Lý hiện đại, là: “Chúa không chơi xúc xắc”, ý nói rằng trong tự nhiên không tồn tại thứ ngẫu nhiên tuyệt đối. Mãi đến khi cơ học lượng tử ra đời cùng với nguyên lý Bất định Heisenberg và Phương trình Schrodinger đã bác bỏ tính “dự đoán được” của cơ học cổ điển được áp dụng vào cơ học lượng tử, từ đó mang đến cho các nhà Vật Lý một góc nhìn mới về ngành Cơ học lượng tử.



\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 8: Elip và Hyperbol.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Định nghĩa (Elip):** Trong mặt phẳng , cho hai điểm và cố định. Khi đó, với điểm di động, quỹ tích của điểm là một hình Elip nếu tập hợp các điểm thỏa mãn: , với là một hằng số.

A diagram of a circle with a triangle and a triangle with a triangle and a triangle with a triangle and a triangle with a triangle and a triangle with a triangle and a triangle with a triangle and

Description automatically generated

Hai điểm và được gọi là tiêu điểm của Elip, và là tiêu cự.

Hai điểm và được gọi là hai điểm thuộc trục lớn, và là độ dài trục lớn .

Hai điểm và được gọi là hai điểm thuộc trục nhỏ, và là độ dài trục nhỏ.

**Phương trình chính tắc của Elip:** Với , , là các hằng số dương. Từ định nghĩa Elip, ta có: và . Khi đó:

Đặt , ta có:

Phương trình được gọi là phương trình chính tắc của Elip .

**Định nghĩa (Hyperbol):** Trong mặt phẳng , cho hai điểm cố định và . Khi đó, với điểm di động, quỹ tích của điểm là một hình Elip nếu tập hợp các điểm thỏa mãn: , với là một hằng số.

A graph of a function

Description automatically generated

Hai điểm và được gọi là tiêu điểm của Hyperbol, và là tiêu cự.

Hai điểm và được gọi là hai điểm thuộc trục thực, và là độ dài trục thực .

Hai điểm và được gọi là hai điểm thuộc trục ảo, và là độ dài trục ảo.

**Phương trình chính tắc của Hyperbol:** Với , , là các hằng số dương. Từ định nghĩa Hyperbol, ta có: và . Khi đó:

Giả sử (trường hợp ), ta có:

Đặt , ta có:

Phương trình được gọi là phương trình chính tắc của Hyperbol. Một cách tương tự, ta có thể chứng minh cho trường hợp .

**Đường conic:** Là quỹ tích của các điểm mà tỉ lệ khoảng cách từ nó tới điểm cố định chia cho khoảng cách từ nó tới đường thẳng cố định thì bằng giá trị thực . Ta có điểm cố định được gọi là tiêu điểm, đường thẳng cố định được gọi là đường chuẩn và giá trị thực được gọi là tâm sai.

Đối với , ta được quỹ tích là một hình tròn.

Đối với , ta được quỹ tích là một hình Elip (nằm trên mặt phẳng vuông góc với đường ).

Đối với , ta được quỹ tích là một hình Parabol (nằm trên mặt phẳng chứa điểm và đường ).

Đối với , ta được quỹ tích là một hình Hyperbol.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài tập tự luyện.

**Câu 1:** Cho hàm số bậc hai có dạng có hai nghiệm là và . Tìm nghiệm của hàm số .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |
| 1. Không có đáp án phù hợp. |  |

**Câu 2:** Cho hàm số và . Tìm giá trị của để hai hàm số và có duy nhất một giao điểm.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Câu 3:** Cho hàm số Parabol có dạng và một đường thẳng cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt tại hai điểm phân biệt và , tính độ dài đoạn thẳng .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Câu 4:** Cho đồ thị hàm số Parabol có dạng . Tìm số điểm giao của Parabol với trục .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. Vô số. |

**Câu 5:** Cho một đường cong đi qua 3 điểm , và . Đường cong là đường gì ?

|  |  |
| --- | --- |
| 1. là đường Elip. | 1. là đường Parabol. |
| 1. là đường tròn. | 1. Không có đáp án đúng. |
| 1. là đường Hyperbol. |  |

**Câu 6:** Cho hai Parabol là và . Số giao điểm của hai Parabol và là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 7:** Cho 3 điểm , và sao cho thỏa mãn biểu thức:

Với và là hai vector bất kỳ, khi đó gọi là diện tích tạo bởi tam giác , khi đó giá trị của bằng bao nhiêu.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. Không tính được. | 1. Không đủ dữ kiện để tính. |  |

**Câu 8:** Cho 4 điểm , , và . Tính tổng của hai góc là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 9:** Gọi là phân giác của góc . Cho là một điểm nằm ngoài đường thẳng đi qua . Gọi là điểm đối xứng của qua đường thẳng , tìm tọa độ điểm .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Câu 10:** Gọi đường thẳng và đường thẳng cắt hai trục và tại lần lượt hai điểm và . Tính tỉ số là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. Không tính được. |

**Câu 11:** Cho đường thẳng , gọi là một điểm nằm ngoài đường thẳng , gọi là một điểm đối xứng của qua đường thẳng . Tính độ dài đoạn thẳng .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. . |  |
| 1. . |  |
| 1. . |  |

**Câu 12:** Cho đường tròn Một điểm có hoành độ bằng và thuộc đường tròn , một đường thẳng có vector pháp tuyến là và đường thẳng này cắt đường tròn tại 2 điểm và sao cho tam giác vuông tại . Tính tích vô hướng .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 13:** Cho phương trình đường cong . Tính diện tích được tạo bởi đường cong và đường thẳng .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 14:** Cho tam giác có tọa độ 3 đỉnh , và . Gọi là bán kính đường của đường tròn ngoại tiếp , gọi là bán kính của đường tròn nội tiếp , tính tổng của là:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . |  |  |

**Câu 15:** Cho , , và là các vector trong mặt phẳng và thỏa mãn biểu thức:

Với là một tham số, vậy khi đó cách biểu diễn của tham số là:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . |  |  |
| 1. . | 1. . | 1. . |

**Đề bài chung cho các câu 16, 17, 18, 19 và 20:** Cho đường tròn tâm và bán kính . Khi đó, đường tròn có hai tiếp tuyến là và . Khi đó điểm là giao điểm của hai tiếp tuyến và . Gọi là giao điểm của đường tròn với đường thẳng và là giao điểm của đường tròn và đường thẳng .

**Câu 16:** Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tứ giác .

|  |
| --- |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |

**Câu 17:** Viết phương trình đường thẳng .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |
| 1. . |  |

**Câu 18:** Tìm tọa độ điểm của và .

|  |
| --- |
| 1. và . |
| 1. và . |
| 1. và . |
| 1. và . |
| 1. và . |

**Câu 19:** Viết phương trình đường thẳng :

|  |
| --- |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |

**Câu 20:** Viết phương trình đường thẳng :

|  |
| --- |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |

**Câu 21:** Vào kỳ thi cuối kỳ của bộ môn cầu lông, hai bạn An và Bình được bắt cặp với nhau để đánh cầu lông. Với mỗi bạn đánh trúng cầu qua lưới thì sẽ được cả hai bạn sẽ được cộng một điểm. Xác xuất đánh trúng cầu qua lưới của An là và của Bình là , biết rằng xác xuất của hai bạn đánh trúng cầu là 2 biến cố độc lập. Tính xác xuất để cả hai bạn đạt 10 điểm.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 22:** Một bộ bài Tây gồm 52 lá bài là bao gồm 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A và mỗi loại như vậy sẽ có 4 lá giống nhau. Bốc ra 5 lá bất kỳ từ bộ bài trên, tính xác xuất bốc được một bộ 4 lá giống nhau (tứ quý).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |  |

**Câu 23:** Một đoàn tàu gồm 3 toa và có 5 hành khách đang chờ ở bến tàu. Do kiến trúc thiết kế của mỗi toa tàu là khác nhau nên xác xuất để có hành khách lên tàu là khác nhau, cụ thể toa có xác xuất hành khách lên tàu là , toa là và toa 3 là ; biết rằng xác xuất lên toa tàu của các hành khách là các biến cố độc lập. Khi đó, tính xác xuất để cả 5 hành khách cùng ngồi trên 1 toa tàu.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 24:** Một nhà máy sản xuất nước khoáng có 10 máy hoạt động, do vấn đề về kỹ thuật nên mỗi máy đều có xác xuất bị hỏng là . Biết rằng mỗi ngày, nếu có một máy hoạt động thì nhà máy sẽ kiếm về , nếu có một máy bị hư thì nhà máy sẽ mất để sửa máy. Tính xác xuất để nhà máy có lời sau 7 ngày.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. *.* |

**Câu 25:** Một đề thi gồm 20 câu trắc nghiệm, mỗi câu sẽ có 5 đáp án , , , , . Biết rằng nếu chọn đúng 1 câu thì sẽ được điểm; nếu chọn sai thì sẽ bị trừ điểm; nếu không chọn thì sẽ không được điểm câu đó, biết rằng việc chọn đáp án giữa các câu hỏi là các biến cố độc lập. Tính xác xuất để thí sinh đạt được một số điểm nguyên dương và tối thiểu là điểm.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. . | 1. . |
| 1. . |  |
| 1. . |  |

**Câu 26:** Hai bạn Tuấn và Thuần chơi đánh cầu lông với nhau, biết rằng phương trình quỹ đạo của trái cầu là hình Parabol có dạng , với là một hằng số dương. Trong một hiệp đấu, bạn Thuần đánh cầu làm cho cầu bay đi với vận tốc ban đầu là và có phương hợp với phương ngang một góc . Viết phương trình Parabol đó, giả sử lấy gốc tọa độ là điểm cầu rời khỏi mặt vợt và gia tốc trọng trường .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |
| 1. . |  |

**Câu 27:** Cho hai phương trình Parabol có dạng là và . Biết rằng hai Parabol này giao nhau tại hai điểm là và . Đặt là phương trình của và là phương trình của . Chọn khẳng định đúng về hàm số .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. , , . | 1. , , . |
| 1. , , . | 1. , , . |
| 1. Không đủ dữ kiện để kết luận. |  |

**Câu 28:** Cho hàm số và các khẳng định sau đây:

(1): Hàm số nằm ở phía trái đơn vị so với .

(2): Hàm số nằm ở phía phải đơn vị so với .

(3): Hàm số nằm ở phía trên đơn vị so với .

(4): Hàm số nằm ở phía dưới đơn vị so với .

Số phát biểu đúng là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 29:** Cho hàm số , với . Hãy mô tả vị trí của hàm số so với hàm số .

|  |
| --- |
| 1. sẽ nằm cao hơn một đoạn và lệch sang phải một khoảng |
| 1. sẽ nằm cao hơn một đoạn và lệch sang phải một khoảng |
| 1. sẽ nằm cao hơn một đoạn và lệch sang phải một khoảng |
| 1. sẽ nằm cao hơn một đoạn và lệch sang phải một khoảng |
| 1. Không đủ dữ kiện để mô tả cụ thể. | |

**Câu 30:** Với bộ số , gọi đường thẳng và parabol lần lượt có phương trình là:

Tìm điều kiện của , , để và có ít nhất 2 giao điểm.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |
| 1. . |  |

**Câu 31:** Cho hai tập hợp và . Biết rằng . Nhận xét nào sau đây đúng về mối liên hệ của hai tập hợp và .

|  |
| --- |
| 1. Hai tập hợp và có ít nhất một phần tử chung. |
| 1. Tập hợp là tập hợp con của tập hợp (). |
| 1. Tập hợp là tập hợp con của tập hợp (). |
| 1. Hai tập hợp và là hai tập hợp bằng nhau (). |
| 1. Hai tập hợp và không có phần tử chung. |

**Câu 32:** Biết rằng , Khi đó, giải phương trình: .

|  |
| --- |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |

**Câu 33:** Biết rằng , . Khi đó, giải phương trình: .

|  |
| --- |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |

**Câu 34:** Cho là đường tròn có tâm và có bán kính , gọi điểm và đặt thì , với . Nếu cho đường tròn có tâm và có bán kính , điểm và đặt góc như trên, khi đó có giá trị bằng:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 35:** Trong trò chơi bốc thăm có 20 lá phiếu bốc thăm và trong đó có 4 lá thăm trúng thưởng. Có 4 người lần lượt rút thăm, tính xác xuất để có 2 người được trúng thưởng?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 36:** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. Không tồn tại . |  |

**Câu 37:** Cho hai hàm số và là hai hàm số bậc hai. Xét hai hàm số sau:

Gọi là tập xác định của hàm số và là tập giá trị của hàm số . Gọi là tập xác định của và là tập giá trị của . Chọn một nhận xét đúng:

|  |
| --- |
| 1. Tập xác định giống với , tập giá trị giống với . |
| 1. Tập xác định khác với , tập giá trị giống với . |
| 1. Tập xác định khác với , tập giá trị khác với . |
| 1. Không xác định được cụ thể và , tập giá trị giống với . |
| 1. Không xác định được cụ thể và ; và . |

**Câu 38:** Cho tam giác có tâm và trọng tâm . Gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác , khi đó bằng bao nhiêu?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. Không tính được. |  |

**Câu 39:** Một mật khẩu bao gồm 10 ký tự trong đó các ký tự có thể là ký tự chữ bao gồm ; các số bao gồm từ đến ; và 10 ký tự đặc biệt bao gồm: , , , , , , , , , . Biết rằng một máy tính sử dụng phương pháp so sánh chuỗi ký tự để giải mã được một ký tự của mật khẩu là 10s (đối với các ký tự chữ), 15s (đối với các ký tự số) và 20s đối với các ký tự đặc biệt. Tính thời gian tối thiểu để máy tính giải mã được toàn bộ ký tự của mật khẩu?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. năm. | 1. năm. | 1. năm. |
| 1. năm. | 1. năm. |  |

**Câu 40:** Cho hàm số và hàm số . Khi đó hàm số sẽ dương khi nào? Biết rằng và hàm số có hai nghiệm phân biệt.

|  |
| --- |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. Hàm số , , với là tập xác định của . |
| 1. Hàm số , , với là tập xác định của . |

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Đáp án bài tập tự luyện.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1:** B. | **Câu 2:** B**.** | **Câu 3:** A. | **Câu 4:** A. | **Câu 5:** C. |
| **Câu 6:** E. | **Câu 7:** D. | **Câu 8:** D. | **Câu 9:** A. | **Câu 10:** C. |
| **Câu 11:** E. | **Câu 12:** A. | **Câu 13:** D. | **Câu 14:** A. | **Câu 15:** B. |
| **Câu 16:** E. | **Câu 17:** D. | **Câu 18:** A. | **Câu 19:** A. | **Câu 20:** C. |
| **Câu 21:** C. | **Câu 22:** B. | **Câu 23:** E. | **Câu 24:** A. | **Câu 25:** C. |
| **Câu 26:** D. | **Câu 27:** B. | **Câu 28:** E. | **Câu 29:** A. | **Câu 30:** B. |
| **Câu 31:** E. | **Câu 32:** C. | **Câu 33:** C. | **Câu 34:** A. | **Câu 35:** C. |
| **Câu 36:** B. | **Câu 37:** E. | **Câu 38:** C. | **Câu 39:** A. | **Câu 40:** C. |